

Тема 5. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП

Вопросы:

1. *Каноническая форма представления ЗЛП.*
2. *Основные понятия теории симплекс-метода*
3. *Алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом*
4. *Представление алгоритма симплекс-метода в виде симплекс-таблиц*

Каноническая форма представления ЗЛП

Из общей формы представления ЗЛП (см. Тему 3, 3.4-3-6) и из ее экономического смысла следует, что ЗЛП может быть поставлена как задача на нахождение либо максимального, либо минимального значения целевой функции. Чтобы сформулировать четкий алгоритм решения ЗЛП, можно для универсальности допустить, что во всех случаях будет рассматриваться ЗЛП, в которой необходимо найти **минимальное** значение целевой функции. Такое допущение может быть оправданным, так как любую задачу оптимизации на поиск максимального значения можно свести к задаче максимизации значения целевой функции путем умножением целевой функции на -1:

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(-f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Действительно, наглядно это можно подтвердить на примере обычной линейной функции, зависящей от одного аргумента x :

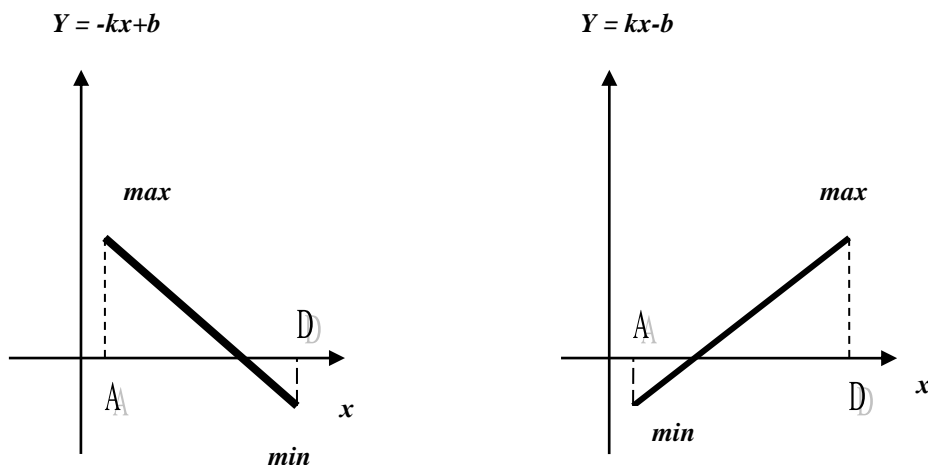


Рис. 5.1

На отрезке $[A; D]$ $\max(-kx + b) = \min(kx - b)$ и наоборот.

Кроме того, из общей постановки ЗЛП следует также, что в системе ограничений неравенства могут иметь различные знаки соотношений ($<, >, =$), а с точки зрения применения алгебраических методов поиска решений систему неравенств следует преобразовать в систему равенств.

В связи с этим, в теории ЛП была введена **каноническая (стандартная) форма** представления ЗЛП. Чтобы ее получить, в исходной задаче должны быть проведены следующие преобразования:

- 1) целевую функцию следует минимизировать;
- 2) системы неравенств ограничений должны быть преобразованы в систему равенств путем введения дополнительных переменных с неотрицательной правой частью;
- 3) все переменные должны быть неотрицательными.

Рассмотрим возможные способы преобразования типа 2:

А) пусть имеется неравенство вида $a_1x + a_2y \leq b$, тогда, чтобы преобразовать его в равенство необходимо **добавить** некоторую дополнительную переменную w :

$$a_1x + a_2y + w = b$$

С точки зрения экономического смысла ЗЛП ограничения, записанные в виде неравенств со знаком \leq , означают, что расход некоторого ресурса на выпуск производимой продукции не должен превышать запаса этого ресурса. Следовательно, если в каком-то ограничении неравенство выполниться как равенство, то это будет означать, что ресурс был использован полностью в производстве, в противном случае (знак $<$) – ресурс был использован неполностью. С этой точки зрения величину w можно трактовать как **остаток** некоторого ресурса (и по смыслу он может быть только неотрицательным).

Б) пусть имеется неравенство вида $a_1x + a_2y \geq b$, тогда для преобразования его в равенство можно **вычесть** некоторую переменную w :

$$a_1x + a_2y - w = b$$

Тогда, проведя аналогичные рассуждения, можно объяснить экономический смысл такой переменной как **избыток** некоторого ресурса.

В) Неотрицательность правой части равенств можно получить путем умножения всего равенства на -1, то есть $a_1x + a_2y = -b$ равносильно $-a_1x - a_2y = b$.

Введение остаточных или избыточных переменных не меняет исходную постановку ЗЛП, а в уравнении целевой функции их учитывают с нулевыми коэффициентами.

Таким образом, каноническая форма ЗЛП в общем случае имеет вид:

Целевая функция:

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m \quad (5.1)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \pm w_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \pm w_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \pm w_m &= b_m \end{aligned} \quad (5.2)$$

и дополнительных ограничениях:

$$x_j \geq 0; w_i \geq 0; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}, \quad (5.3)$$

В качестве примера представим задачу (4.6)-(4.10) (см. **Тему 4**) в канонической форме:

Общая форма ЗЛП	Каноническая форма ЗЛП
$\max F = 3x_1 + 2x_2$	$\min(-F) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$
$-5x_1 + 4x_2 \leq 20$	$-5x_1 + 4x_2 + x_3 = 20$
$2x_1 + 3x_2 \leq 24$	$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 24$
$x_1 - 3x_2 \leq 3$	$x_1 - 3x_2 + x_5 = 3$
$x_j \geq 0; j = \overline{1, 2}$	$x_j \geq 0; j = \overline{1, 2}; x_i \geq 0; i = \overline{1, 3}, x_i$ – остаточные переменные

Основные понятия теории симплекс-метода

ЗЛП, представленная в канонической форме (5.1)-(5.3), имеет m уравнений и n неизвестных (под n в дальнейшем будет подразумеваться все переменные задачи (5.1)-(5.3), включая и дополнительные), причем число уравнений меньше числа неизвестных. Общее количество неизвестных задачи (5.1)-(5.3) можно разделить на два множества:

- **($n-m$)** – множество переменных, которые положим равными нулю;
- **m** – множество переменных, отличных от нуля, значения которых можно определить путем решения системы m уравнений с m неизвестными.

Известно, что если система, состоящая из m уравнений и n неизвестных, линейно независима, то множество переменных m является **единственным** решением системы. Тогда будем называть множество переменных m **базисными**, через которые можно выразить все остальные переменные ($n-m$), являющиеся соответственно небазисными или **свободными**. Результирующая совокупность базисных и свободных переменных является одним из решений ЗЛП (5.1)-(5.3). Если все переменные являются **неотрицательными**, то решение называют **допустимым** решением задачи (или **опорным планом**), в противном случае – **недопустимым** решением (**псевдопланом**). Таким образом, допустимым решением называют решение, соответствующее заданному базису (переменные m), полученное из условия равенства нулю свободных переменных ($n-m$). Ненулевых компонент может быть не более m .

Примеры. Пусть рассматриваются следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{А)} \quad & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Б)} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \text{В)} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Тогда множество переменных (1,1,-1) для системы (5.4) ($m=2$ и $n=3$) будет являться **псевдопланом**, так как переменная x_3 отрицательна; для системы (5.5) множество переменных (0,1,1) будет являться **опорным** планом и число ненулевых компонент равно 2. Для последней системы (5.6) множество переменных (0,1,0) будет также опорным планом, но число ненулевых компонент меньше, чем m .

Если в опорном плане число ненулевых компонент меньше, чем m , то он называется **вырожденным**.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что оптимальное решение ЗЛП, представленной в канонической форме, можно получить путем простого перебора всех допустимых решений или опорных планов. Тогда возникает следующая проблема: нельзя ли процедуру перебора всех возможных решений сделать более эффективной, то есть найти оптимальное решение кратчайшим путем? Тем более, как было показано ранее, понятие оптимизации само по себе предполагает такую процедуру выбора оптимального решения из множества возможных, которая позволяет избежать полного перебора и оценивания всех возможных вариантов.

Отсюда вытекает и основная идея симплекс-метода, предложенного в 1949 году Дж. Данцигом (в 1939 году – Канторовичем для решения транспортной задачи), которая заключается в последовательном переборе опорных решений, каждое из которых соответствует угловой точке многоугольника (многогранника) ОДР, при этом переход от одной угловой точке к другой производится в соответствии с улучшением значения целевой функции.

Таким образом, общая схема алгоритма симплекс-метода может быть представлена следующим образом.

Пусть есть следующая ЗЛП в канонической форме:

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \quad (5.7)$$

при ограничениях:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1 \quad (5.8)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = b_2 \quad (5.9)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + x_6 = b_3 \quad (5.10)$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,6} \quad (5.11)$$

Тогда, используя дополнительные переменные (x_4, x_5, x_6) , можно получить первый опорный план: $x^I = (0, 0, 0, x_4, x_5, x_6)$, так как:

$$x_4 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \quad (5.12)$$

$$x_5 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \quad (5.13)$$

$$x_6 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \quad (5.14)$$

Следовательно, в первом опорном плане переменные (x_4, x_5, x_6) являются **базисными** (ненулевыми), а переменные (x_1, x_2, x_3) – **свободными** (нулевыми). Значение целевой функции на первом шаге будет соответственно равно нулю:

$$F^I = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \quad (5.15)$$

Согласно основной идее симплекс-метода надо попытаться найти новое опорное решение, которое должно **улучшить** значение целевой функции (фактически уменьшить значение F). Возможны следующие ситуации:

А) все коэффициенты c_j являются **положительными**, тогда задача решена, так как значение целевой функции улучшить нельзя (увеличение любого положительного коэффициента приведет к возрастанию целевой функции, а не убыванию);

Б) не все коэффициенты c_j являются положительными, тогда полученное на текущем шаге значение целевой функции можно улучшить путем увеличения некоторой свободной переменной. А для этого нужно сделать одну из текущих базисных переменных нулевой (**вывести** из базиса) и **ввести** вместо нее требуемую свободную переменную (сделать ее ненулевой). Такая замена необходима, чтобы выполнить условие, что опорный план должен содержать m базисных переменных.

Исходя из приведенных рассуждений, рассмотрим алгоритм симплекс-метода.

Алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом

Пусть необходимо решить задачу о планировании производства (4.6)-(4.10) (см. **Тему 4**). Ранее было показано, как эта задача представляется в каноническом виде:

$$\min(-F) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (5.16)$$

$$-5x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \quad (5.17)$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \quad (5.18)$$

$$x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \quad (5.19)$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 5}; \quad (5.20)$$

Решение данной задачи также ранее было получено графическим методом. Для наглядности будем соотносить алгебраический способ решения данной задачи (симплекс-метод) с графическим (см. **Тему 4**).

1 шаг. Получаем первое опорное решение, используя остаточные переменные (x_3, x_4, x_5) как базисные. Выразим через базисные свободные переменные (x_1, x_2) из (5.17-5.19):

$$x_3 = 20 + 5x_1 - 4x_2 \quad (5.21)$$

$$x_4 = 24 - 2x_1 - 3x_2 \quad (5.22)$$

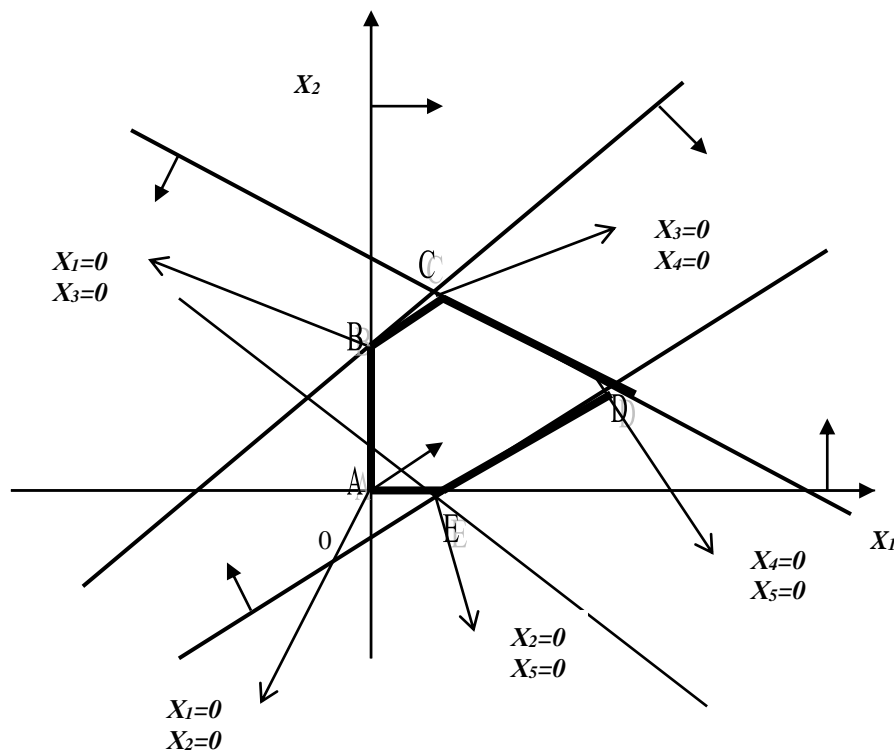
$$x_5 = 3 - x_1 + 3x_2 \quad (5.23)$$

Итак, первый опорный план: $x^I = (0, 0, 20, 24, 3)$, а соответствующее ему значение целевой функции:

$$F^I = -3x_1 - 2x_2 = 0 \quad (5.24)$$

Если обратиться к графической интерпретации решения ЗЛП (см. **Рис. 5.2**), то первому опорному плану соответствует **угловая точка А**.

Для сравнения дополним геометрическую интерпретацию задачи информацией о том, какие переменные обращаются в ноль в каждой угловой точке согласно системе ограничений (5.21-5.23) и условию неотрицательности (5.20).



2 шаг. Анализируем выражение (5.24). Так как среди коэффициентов целевой функции есть отрицательные, то полученное опорное решение не является оптимальным. В соответствии с идеей симплекс-метода нужно осуществить переход к следующей угловой точке, то есть найти новый опорный план, но так, чтобы значение целевой функции (5.24) улучшилось (уменьшилось). Согласно выражению (5.24) значение целевой функции можно уменьшить с помощью увеличения переменной x_1 , либо увеличением переменной x_2 . Так как коэффициент при переменной x_1 по абсолютной величине больше, чем коэффициент при переменной x_2 , то следует ввести в базис переменную x_1 .

Следовательно, можно сформулировать **правило ввода** новой переменной в базис: вводить в базис следует ту переменную, у которой коэффициент максимальный по абсолютной величине.

3 шаг. Необходимо определить, вместо какой базисной переменной следует ввести новую переменную (в данном случае x_1). Как было отмечено ранее, ввод новой переменной в базис означает вывод некоторой переменной из базиса, то есть выводимая переменная должна обратиться в ноль. Проанализируем уравнения (5.21-5.23):

- из (5.21) видно, что ни при каких значениях x_1 переменная x_3 не обратится в ноль, так как коэффициент при x_1 положительный и равенство нулю возможно при $x_1 = -4$, а это противоречит условию неотрицательности переменных в ЗЛП;
- из (5.22) следует, что переменная x_4 обратится в ноль при $x_1 = 12$;
- из (5.23) получаем, что переменная x_5 обратится в ноль при $x_1 = 3$.

Если обратиться к графическому представлению (см. Рис. 5.2), то видно, что пересечение линий уравнений $x_2 = 0$ и $x_1 - 3x_2 = 3$ соответствует угловой точке **E**, в которой переменные x_2 и x_5 обращаются в ноль. Значит, переменную x_1 следует ввести в базис вместо переменной x_5 . Так как, при решении ЗЛП, зависящей от более, чем двух неизвестных, графическое представление фактически невозможно, то алгебраически выбор переменной, выводимой из базиса, соответствует следующему **правилу вывода**:

выводить из базиса следует ту переменную, у которой отношение правой части ограничений к соответствующим **отрицательным** значениям при переменной, вводимой в базис, является минимальным по абсолютной величине.

Для данного примера должно выполняться условие:

$$\min \left| \frac{b_i}{a_{i1}} \right| \text{ для всех коэффициентов } a_{i1} < 0. \text{ Тогда из (5.22) имеем } - \left| \frac{24}{-12} \right| = 12, \text{ а из (5.23) } - \left| \frac{3}{-1} \right| = 3. \text{ Минимальное отношение равно 3, следовательно алгебраически}$$

подтверждается, что в базис следует ввести x_1 переменную вместо переменной x_5 .

Таким образом, новый базис - (x_3, x_4, x_1) , свободные переменные - (x_2, x_5) .

4 шаг. Выражаем свободные переменные через базисные. Для этого из выражения (5.23) выразим переменную x_1 :

$$x_1 = 3 + 3x_2 - x_5 \quad (5.25)$$

Подставляем (5.25) в (5.21) и (5.22), упрощая, получаем:

$$x_3 = 20 + 5(3 + 3x_2 - x_5) - 4x_2 = 35 + 15x_2 - 5x_5 - 4x_2$$

$$x_3 = 35 + 11x_2 - 5x_5 \quad (5.26)$$

$$x_4 = 24 - 2(3 + 3x_2 - x_5) - 3x_2 = 18 - 6x_2 + 2x_5 - 3x_2$$

$$x_4 = 18 - 9x_2 + 2x_5 \quad (5.27)$$

Подставляя (5.25) в (5.24), получаем:

$$F^2 = -3x_1 - 2x_2 = -3(3 + 3x_2 - x_5) - 2x_2 = -9 - 9x_2 + 3x_5 - 2x_2$$

$$F^2 = -9 - 11x_2 + 3x_5 \quad (5.28)$$

Таким образом, получаем новый опорный план - $x^2 = (3, 0, 35, 18, 0)$, а соответствующее ему значение целевой функции $F^2 = -9$. Так как $F^2 < F^1$, то новый опорный план улучшает значение целевой функции, но он не оптимальный, так как не все коэффициенты целевой функции положительны. Следовательно, нужно опять повторить процедуру замены переменных в базисе. В выражении (5.28) отрицательный коэффициент при переменной x_2 , следовательно, увеличивая ее значение, можно улучшить значение целевой функции.

5 шаг. Выполняем правило вывода: исчисляем отношения правых частей ограничений к отрицательным коэффициентам при x_2 , то есть $\min \left| \frac{b_i}{a_{i2}} \right|$ для всех $a_{i2} < 0$. Так как

отрицательный коэффициент при x_2 только в уравнении (5.27), то следует ввести в базис переменную x_2 вместо переменной x_4 . Таким образом, если вновь обратится к графическому представлению (Рис. 5.2), то произошел переход из угловой точки E в угловую точку D . В этой точке в ноль обращаются переменные x_4 и x_5 .

Итак, новый базис - (x_3, x_2, x_1) , а свободные переменные - (x_4, x_5) .

6 шаг. Снова выражаем свободные переменные через базисные.

Для этого из выражения (5.27) выразим переменную x_2 :

$$9x_2 = 18 + 2x_5 - x_4$$

$$x_2 = 2 - \frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5 \quad (5.29)$$

Подставляем (5.29) в (5.25) и (5.26), упрощая, получаем:

$$x_1 = 3 + 3\left(2 - \frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5\right) - x_5 = 9 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 - x_5$$

$$x_1 = 9 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \quad (5.30)$$

$$x_3 = 35 + 11\left(2 - \frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5\right) - 5x_5 = 57 - \frac{11}{9}x_4 + \frac{22}{9}x_5 - 5x_5$$

$$x_3 = 57 - \frac{11}{9}x_4 - \frac{23}{9}x_5 \quad (5.31)$$

Подставляя (5.29)- в (5.28), получаем:

$$F^3 = -9 - 11x_2 + 3x_5 = -9 - 11\left(2 - \frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5\right) + 3x_5 = -9 - 22 + \frac{11}{9}x_4 - \frac{22}{9}x_5 + 3x_5$$

$$F^3 = -31 + \frac{11}{9}x_4 + \frac{5}{9}x_5 \quad (5.32)$$

Таким образом, получаем новый опорный план – $x^3 = (9, 2, 57, 0, 0)$, а соответствующее ему значение целевой функции $F^3 = -31$. Так как $F^3 < F^2$, то новый опорный план улучшает значение целевой функции и он оптимальный, так как все коэффициенты целевой функции положительны.

Значит, задача (5.16-5.20) решена, оптимальный план $x_1=9$, $x_2=2$, а соответствующее ему максимальное значение целевой функции равно – 31 (согласно графическому представлению – это угловая точка D).

Представление алгоритма симплекс-метода в виде симплекс-таблиц

Рассмотренный алгоритм симплекс-метода удобно реализовывать с помощью симплекс-таблиц. Представим процесс вычислений в симплекс-таблице на примере задачи (5.16-5.20).

Заполним данные на начальной итерации, соответствующие выражениям (5.21-5.24):

Табл 5.1

Итерация	Базис	Свободные члены	Переменные				
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	X_3	20	-5	4	1	0	0
	X_4	24	2	3	0	1	0
	X_5	3	1	-3	0	0	1
	F^1	0	-3	-2	0	0	0

В последней строке (ее также называют индексной) содержатся значение и коэффициенты целевой функции. Данная таблица соответствует начальному состоянию задачи, а именно первому опорному решению – $x^1 = (0, 0, 20, 24, 3)$ (угловая точка A в графическом представлении).

Согласно алгоритму, необходимо ввести в базис переменную x_1 , так как ей соответствует наибольший из отрицательных (по абсолютному значению) коэффициент целевой функции. Будем называть **столбец** симплекс-таблицы, содержащий **вводимую** переменную – **ведущим**. Согласно правилу вывода надо проанализировать отношения:

$\min \left| \frac{b_i}{a_{i1}} \right|$ для всех коэффициентов $a_{i1} < 0$. Для симплекс-таблицы это правило будет

реализовываться несколько иначе: следует выводить ту переменную из базиса, у которой отношение правых частей к коэффициентам в **ведущем** столбце среди **положительных** будет минимальным. (Это следует из того, что при записи в симплекс-таблице значения коэффициентов меняются по знаку, что видно из сравнения (5.21-5.23) и Табл 5.1). Дополним симплекс-таблицу отношениями и выделим согласно минимальному из них ведущую строку – то есть ту строку, которая соответствует выводимой из базиса переменной.

Табл 5.2

Итерация	Базис	Свободные члены	Переменные					Отношения
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	X_3	20	-5	4	1	0	0	-
	X_4	24	2	3	0	1	0	12
	X_5	3	1	-3	0	0	1	3
	F^1	0	-3	-2	0	0	0	

Вед.
столбец

На пересечении ведущего столбца, соответствующего вводимой переменной x_1 , и ведущей строки, соответствующей выводимой переменной x_5 , получаем элемент, который будем называть *ведущим*. Согласно таблице 5.2 – ведущий элемент равен 1.

Следующим шагом согласно алгоритму должен быть пересчет таблицы, соответствующий выражению свободных переменных через новый базис. Эта процедура может быть реализована с помощью метода *исключения переменных* Гаусса-Жордана. Согласно этому методу, чтобы вычислить новое опорное решение, нужно:

- вычислить элементы **новой** ведущей строки, которую можно получить путем деления текущей ведущей строки на **ведущий элемент** (для рассматриваемого примера такое деление не требуется, так как ведущий элемент равен 1);
- вычислить элементы остальных строк, включая индексную строку (для целевой функции) по правилу: элемент новой строки равен элементу текущей строки минус коэффициент текущей строки в ведущем столбце, умноженный на элемент новой ведущей строки.

Для данного примера в симплекс-таблице заполняем вторую итерацию. Прежде всего заменяем строку *таблицы 5.2* для переменной x_5 на ведущую строку (переменная x_1). Как было сказано ранее, новая ведущая строка будет фактически в *таблице 5.3* без изменений, так как ведущий элемент равен 1. Все остальные элементы пересчитаем согласно приведенному правилу. Например, строка для переменной x_3 будет пересчитываться следующим образом: $20 - (-5) \cdot 3$; $-5 - (-5) \cdot 1$; $4 - (-5) \cdot (-3)$ и т. д. В итоге строка x_3 будет содержать следующие элементы: **35; 0; -11; 1; 0; 5**. Проведя аналогичные вычисления с оставшимися строками симплекс-таблицы, получим:

Табл 5.3

Итерация	Базис	Свободные члены	Переменные					Отношения
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
2	X_3	35	0	-11	1	0	5	
	X_4	18	0	9	0	1	-2	2
	X_1	3	1	-3	0	0	1	
	F^2	9	0	-11	0	0	3	

Вед.
столбец

Таким образом, полученная таблица соответствует соотношениям (5.29-5.32), и второй опорный план – $x^2 = (3, 0, 35, 18, 0)$, а соответствующее ему значение целевой функции $F^2 = 9$ (угловая точка E). (В соотношении (5.32) значение целевой функции равно -9, а в симплекс-таблице получается значение 9, так как в симплекс-таблице целевая функция представляется в виде: $F^i = 0 - F^{i-1}$).

Снова определяем ведущий столбец – переменная x_2 и ведущую строку – переменная x_4 , выявляем на их пересечении ведущий элемент (9), затем выполняем пересчет симплекс-таблицы:

Табл 5.4

Итерация	Базис	Свободные члены	Переменные					Отношения
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
3	X_3	57	0	0	1	11/9	23/9	
	X_2	2	0	1	0	1/9	-2/9	
	X_1	9	1	0	0	1/3	1/3	
	F^3	31	0	0	0	11/9	5/9	

В итоге получаем третий опорный план $x^3 = (9, 2, 57, 0, 0)$, а соответствующее ему значение целевой функции $F^3 = 31$ (угловая точка D). План является оптимальным, так как в индексной строке все коэффициенты положительны.

Таким образом, окончательно можно сформулировать алгоритм симплекс-метода с учетом представления его в виде симплекс таблицы:

Шаг 1. находится начальное допустимое решение.

Шаг 2. Анализируются коэффициенты целевой функции (в индексной строке). Согласно правилу ввода определяется переменная, которую следует ввести в базис. Если таких переменных нет, то процесс вычислений прекращается, задача решена.

Шаг 3. Согласно правилу ввода выбирается переменная, которую нужно вывести из базиса: $\min \frac{b_i}{a_{ik}}$ для всех коэффициентов $a_{ik} > 0$, где k - номер ведущего столбца.

Шаг 4. Методом Гаусса-Жордана вычисляется новый опорный план по формулам:

- пересчет новой ведущей строки: $a'_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{sk}}$, $b'_s = \frac{b_s}{a_{sk}}$ где $j = \overline{1, n}$, a_{sk} – ведущий элемент;

- пересчет остальных элементов симплекс-таблицы:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a'_{sj} a_{ik}$$

$$b'_i = b_i - b'_s a_{ik} \quad \text{для всех } i \neq s, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\text{для индексной строки: } F' = F - b'_s c_k, \quad c'_j = c_j - a'_{sj} c_k$$

Затем осуществляется переход к **шагу 2**.